Μάθημα 7ο 15/03/18

Συνέχεια της Άσκησης: Το $G=\{z\in\mathbb{C} : A|z|^2+2Re(Bz)+C=0\}$ με $A,C\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{C}$ $|B|^2>AC$ αντιστοιχεί γεωμετρικά σε ευθεία αν $A=0$ και κύκλο αν $A\neq 0$ και αντίστροφα: Έστω $ax+by+\gamma=0$, $a,b,\gamma\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2>0$. Θέτουμε $z=x+yi$, $B=a/2-ib/2$, $C=\gamma$ και λαμβάνουμε $\underbrace{2Re(Bz)}_{\frac{a}{2}x+y\frac{b}{2}}+C=0$

Έστω κύκλος $K(a,b)$ και ακτίνας $r>0$. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2+2(\underbrace{-ax-by}_{ax+by})+a^2+b^2-r^2=0$. Θέτουμε $A=1$, $B=-a+ib$, $C=a^2+b^2-r^2$ και λαμβάνουμε ότι $A(x^2+y^2)+2Re(Bz)+C=0$ με $|B|^2=a^2+b^2>a^2+b^2-r^2=AC$

→ Για την ευθεία $2Re(Bz)+C=0$ με $|B|^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)>0$

Εφαρμογή της Προηγούμενης Άσκησης

Χαρακτηρίστε γεωμετρικά τις εικόνες κύκλων και ευθειών στο $\mathbb{C}$ κάτω από την απεικόνιση $f(z)=1/z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και δώστε απλά παραδείγματα για τις περιπτώσεις που προκύπτουν.

Λύση: Η f έχει π.ο. $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Όλες οι ευθείες και κύκλοι έχουν τη μορφή $G=\{z\in\mathbb{C} : A|z|^2+2Re(Bz)+C=0\}$ με $|B^2|>AC$ και παρατηρούμε ότι το G περιέχει το "0" ανν: ① Εξετάζουμε τι θα γίνει στην περίπτωση που $C\neq 0$. ⓐ κύκλος ανν $A\neq 0$. $f(G)=\{w=1/z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ με $A|z|^2+2Re(Bz)+C=0\}$

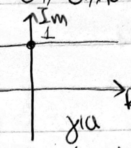
όπου z ικανοποιεί αυτή την σχέση.

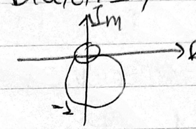
$|z|^2 = z\bar{z}$, $2\mathrm{Re}(Bz) = Bz + \bar{B}\bar{z}$

$f(G) = \{w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : A\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}} + B\cdot\frac{1}{w} + \bar{B}\cdot\frac{1}{\bar{w}} + C = 0\} =$

$= \{w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : A + B\bar{w} + \bar{B}w + C|w|^2 = 0\}$ που είναι κύκλος που δεν περνάει από το "O" αφού $A, C \neq 0$ ⓑ ευθεία που δεν περνάει από το "O" αν-ν: $A=0$, $C\neq 0$. $f(G) = \{w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : B\bar{w} + \bar{B}w + C|w|^2 = 0\}$ Δηλαδή: κύκλος που περνάει από το "O" αλλά δεν το περιέχει.

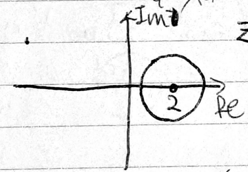
Π.Χ. η ευθεία $\mathrm{Im}z = 1$ έχει υπό την $1/z$ την εικόνα $\partial D(\frac{-i}{2}, \frac{1}{2})\setminus\{0\}$ (ΑΣΚΗΣΗ) όπου $D(a,\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ για $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{C}$ ανοικτός κ.δ. κέντρου a, ακτίνας $\varepsilon > 0$ και $\partial D(a,\varepsilon) := \{\ldots\}$ ο κύκλος... η εικόνα στο W-επίπεδο

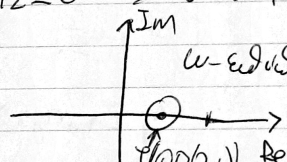




Συνεχίστε την άσκηση

ΔΝΔ δο. ⓐ $C=0$ (δηλ. κύκλοι και ευθείες στο z-επίπεδο που περνάνε από το "O") ⓐ κύκλος $(A\neq 0) \xrightarrow{w=1/z}$ ευθεία που δεν περνάει από το "O" Π.Χ. $\partial D(1,1) \longrightarrow ?$ ⓑ ευθεία $(A=0) \xrightarrow{w=1/z}$ ευθεία που περνάει από το "O" αλλά δεν το περιέχει. Π.Χ. $\mathrm{Im}z = 0 \longrightarrow ?$ και σχεδιάστε τα.





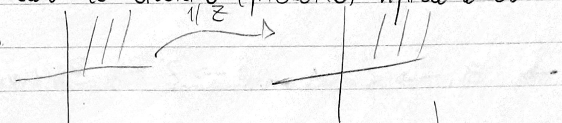
$f(\partial D(2,1)) = \partial D(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

Βρείτε επίσης τα $\partial D(2,1) \longrightarrow \partial D(2/3, 1/3)$ και την εικόνα του μοναδιαίου κύκλου. (*) (*) Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου $\partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z-0| = 1\}$ υπό την $f(z) = 1/z$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^*$ είναι $f(\partial D(0,1)) = \{w = 1/z \in \mathbb{C}^* \; \underbrace{|z|}_{= 1/w = |1/w| = 1/|w|} = 1\}$

$= \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} = \partial D(0,1)\}$

Ασκήσεις: 1) Δ.Ο: $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = 1/z$ είναι 1-1 και επί

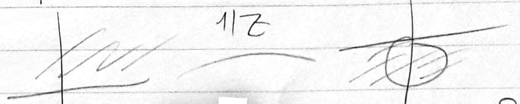
2) Δ.Ο. η f απεικονίζει 1-1 και επί το ανοικτό (μιγαδικό) ημιεπίπεδο στο ανοικτό κάτω ημιεπίπεδο



Κεφ. 2ο Τοπολογία του $\mathbb{C}$

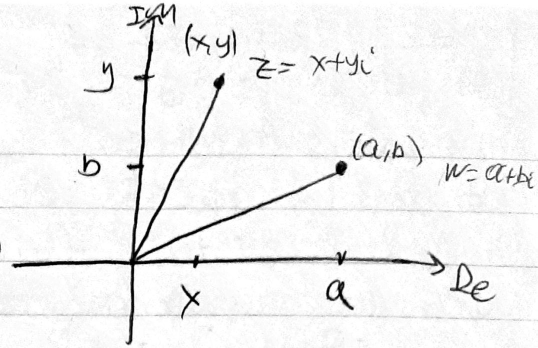
(ακολουθίες, όρια, συναρτήσεων)

Σκοπός από αυτό το κεφ. και στα επόμενα θα ασχοληθούμε με μιγ. ανάλυση, δλδ με όρια δλδ με τοπολογικές ιδιότητες τοπολογία του $\mathbb{C}$ = τοπολ. του $\mathbb{R}^2$



Επαγόμενη από την μετρική $d(z,w) = |z-w|$ από την μετρική $d((\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z), (\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w))) = \|(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z) - (\mathrm{Re}w, \mathrm{Im}w)\|$

$= \|(x,y) - (a,b)\|$



Συνέπειες: Οι έννοιες ανοικτό, κλειστό, εσωτερικό σύνορο, εξωτερικό σύνορο, κλειστή θήκη, σημείο συσ., μεμονωμ. σημείο.

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία στο $\mathbb{C}$ = απεικόνιση από τους φυσικούς στο $\mathbb{C}$

δηλ. $\mathbb{N} \ni n \longmapsto z_n \in \mathbb{C}$

συμβολισμός: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_n) \subset \mathbb{C}$

→ $z_n = x_n + i y_n = (x_n, y_n)$

Γενικά $\mathbb{C} \ni z_n \to z \in \mathbb{C} :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ |z_n - z| < \varepsilon$

η z_n συγκλίνει στο z

Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες ακολ. στον $\mathbb{R}^2$

→ Το όριο συγκλίνουσας ακολ. είναι μοναδικό $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

SOS!!!

→ $z_n \to z \Leftrightarrow z_n - z \to 0 \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \ \wedge \ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$

→ $z_n \to z \ \wedge \ w_n \to w \Rightarrow z_n + w_n \to z + w$

(ΝΕΟ)! → $z_n \to z \wedge w_n \to w \Rightarrow z_n w_n \to zw$ (όπως στο ΑΠΙ)

→ $z_n \to z \wedge w_n \to w \Rightarrow \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$ για $w \neq 0$

Άσκηση: Υπολόγισε το $\frac{(2+i)^{n+1}}{(3-i)^{n-1}} \to$??